

Esercitazione: misura della linea elastica

1. Introduzione, descrizione generale

L'esercitazione proposta ha lo scopo di rilevare sperimentalmente la linea elastica di una trave nella configurazione di flessione su tre punti (*three point bending*): ciò corrisponde ad avere la trave appoggiata su due supporti alle estremità caricata da una forza in posizione centrale (Fig. 1).

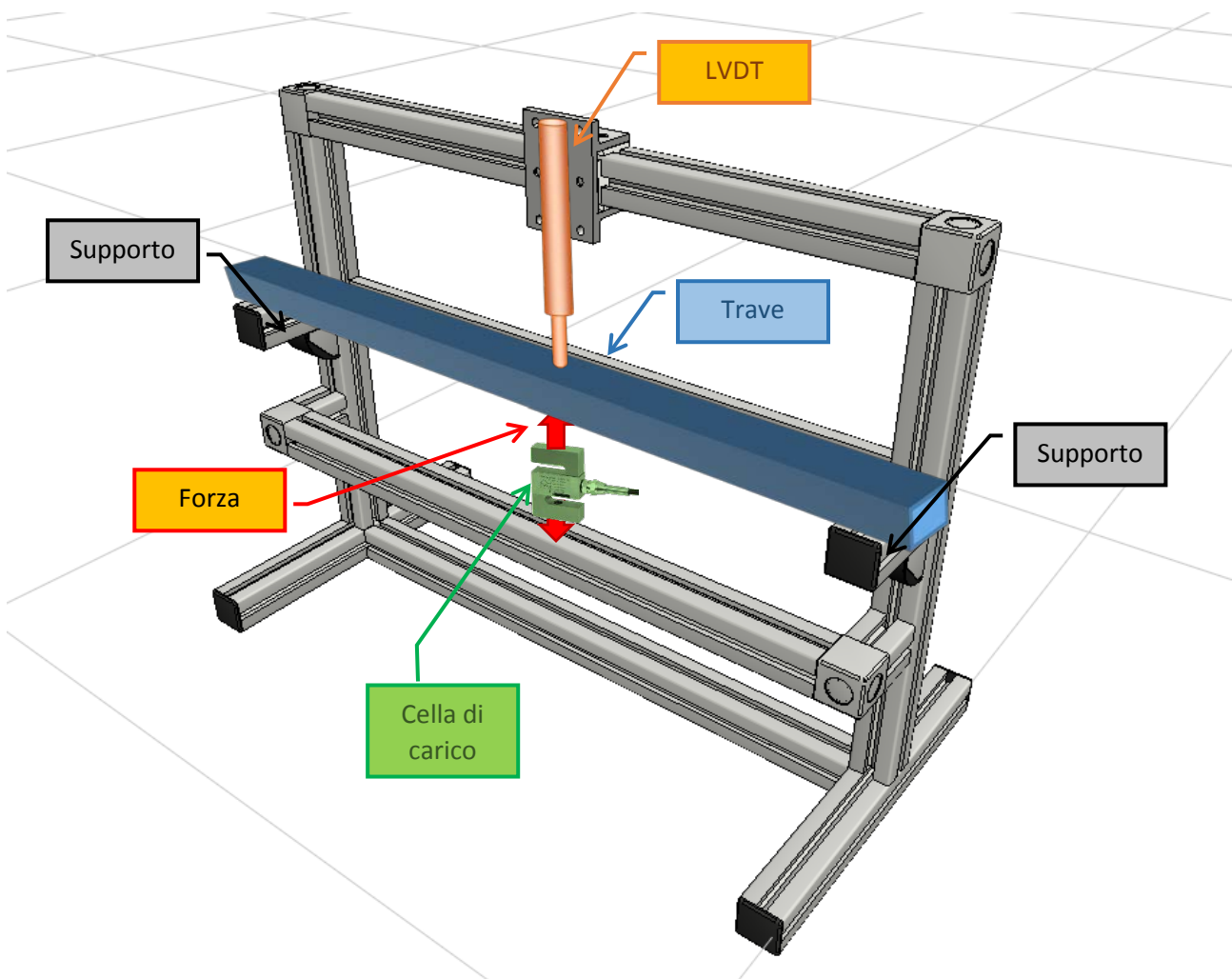


Fig. 1 – Attrezzatura di carico e di misura per l'esercitazione sperimentale

La misura dello spostamento verrà effettuata mediante un *trasduttore di spostamento* induttivo di tipo LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*). La misura della forza mediante una *cella di carico estensimetrica* (nella quale la forza è prima convertita in deformazione meccanica misurata mediante un ponte di estensimetri elettrici a resistenza).

La forza, misurata mediante la suddetta cella di carico, sarà generata mediante un sistema a vite azionato manualmente. La vite produrrà una forza che passerà attraverso la cella di carico (che ne permetterà quindi la misura) e sarà quindi applicata al punto centrale della trave oggetto dell'esperienza.

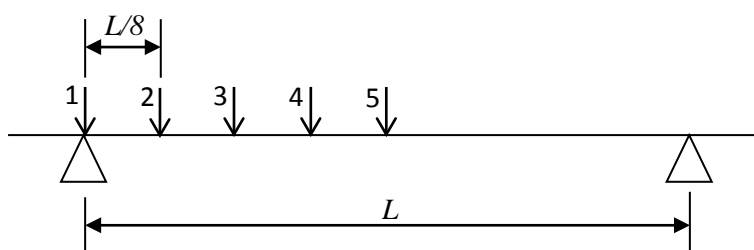
Il trasduttore di spostamento è invece traslabile lungo l'asse della trave per poter misurare gli spostamenti di diversi punti a varie coordinate: misurando in un numero sufficiente di punti (5 è sufficiente per una valutazione adeguata) adeguatamente distanziati si otterrà una approssimazione della linea elastica.

Le misure di forza e spostamento avverranno mediante una scheda di acquisizione a due canali (per forza e spostamento) collegata al PC a disposizione. Un software sviluppato in ambiente [NI LabView®](#) permetterà di misurare i campioni di forza e spostamento. I valori dovranno essere rilevati e memorizzati (su carta o in formato elettronico) per successive elaborazioni e per produrre il documento di valutazione dell'avvenuta esperienza (da compilare sulla apposita scheda del portale della didattica nella propria pagina personale).

Nota bene: per come è impostata l'esercitazione verranno misurati simultaneamente campioni di forza e spostamento. Il loro rapporto è il valore della rigidità statica puntuale (in N/mm) ovvero il valore di forza in N necessario per avere lo spostamento di 1 mm nel punto di misura.

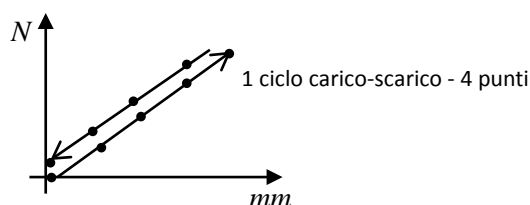
1.1. Procedura

Si considerino i seguenti 5 punti di misura, per ragioni di simmetria limitati a una metà della trave:



L'esercitazione si svolge sinteticamente nel modo seguente (dopo aver preparato e predisposto tutta l'apparecchiatura necessaria ed effettuato i necessari collegamenti e posizionamenti):

- Posizionamento dell'LVDT in uno dei punti di misura lungo l'asse della trave
- Rilevazione della posizione longitudinale mediante scala graduata in mm (o metro a nastro o qualsiasi sistema di misura della posizione)
- Applicazione della forza mediante il sistema a vite (carico dal valore di forza circa nullo fino a un valore adeguato per leggere la curva corsa-spostamento a video del calcolatore), scarico, ripetizione del ciclo carico/scarico per almeno 2 cicli di carico-scarico.
- Registrazione dei valori di forza e spostamento e valutazione del valore di rigidità statica puntuale, ovvero della forza corrispondente ad uno spostamento di valore unitario



- Ripetizione dei punti da a) a d) per altre quattro posizioni il più possibile regolarmente equispaziate fra uno degli appoggi e la metà della lunghezza della trave.

1.2. Materiale fornito per l'esperienza

Il materiale a disposizione necessario per l'esperienza consiste di (Fig. 2):

- Trave in alluminio: sezione e lunghezza fra gli appoggi da rilevare

- Telaio di carico con supporti, sistema di carico a vite, cella di carico ([AEP modello TCA](#) , con portata di 500 N), LVDT ([AML/EU/±5/S](#), con corsa di ± 5 mm) e relativa slitta per il posizionamento
- Cavi di collegamento
- Alimentatore regolabile da laboratorio ([ISO-TECH IPS303DD](#), Vout 0 \rightarrow 30V)
- [Scheda di acquisizione e conversione analogica/digitale a 2 canali NI 9218](#) (in chassis [cDAQ-9171](#), CompactDAQ, 1 slot, con connessione USB)
- Personal computer con software di acquisizione dedicato (sviluppato in ambiente [NI LabView®](#))
- Calibro ventesimale
- Righello metallico

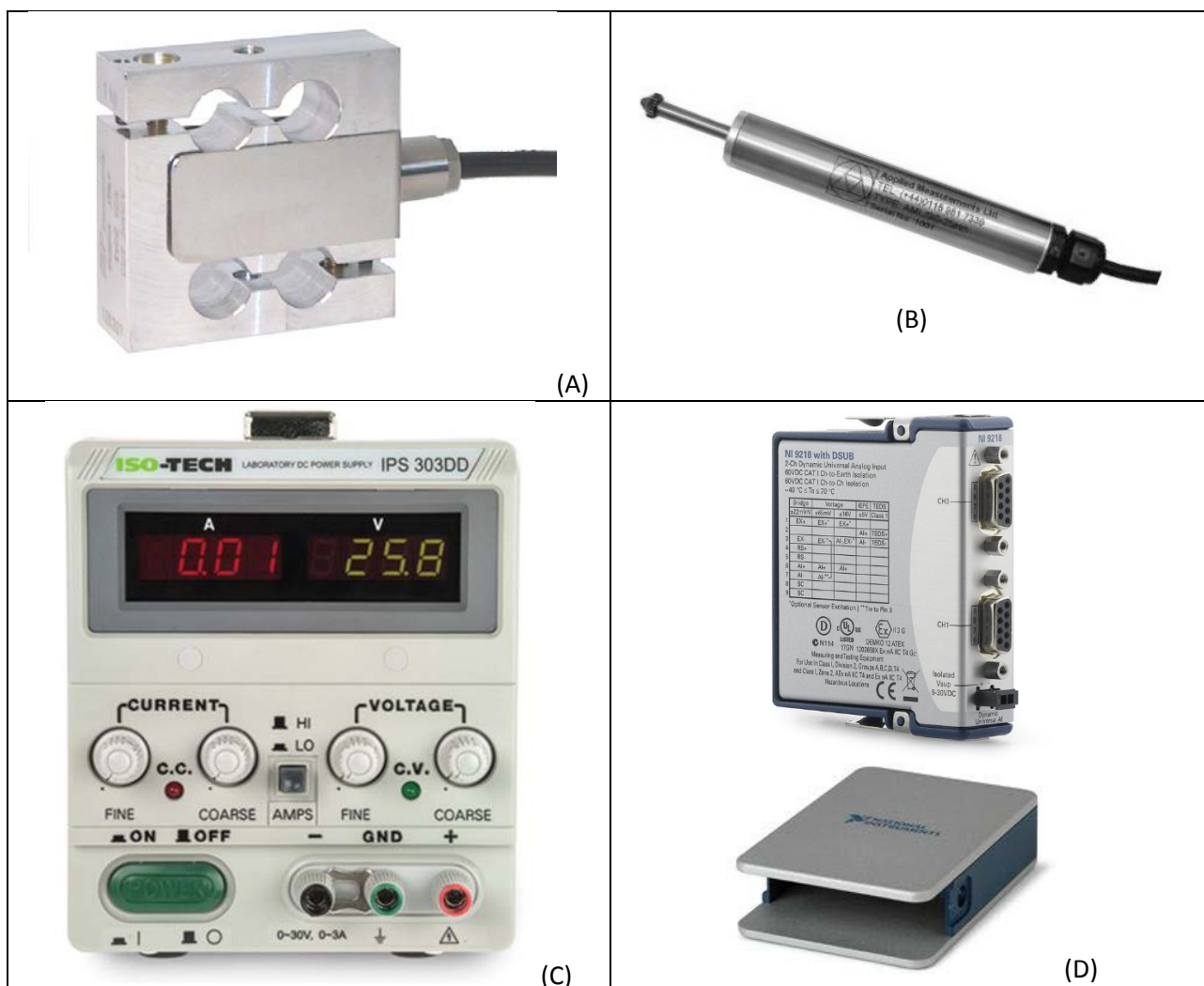


Fig. 2 – Attrezzatura fornita per l'esercitazione: (A) [cella di carico AEP modello TCA](#); (B) [LVDT](#); (C) [alimentatore ISO-TECH IPS303DD](#); (D) [Scheda NI 9218](#) e chassis [cDAQ-9171](#) (CompactDAQ)

2. Svolgimento

Prima di tutto occorre accendere il PC e le apparecchiature elettroniche collegate. Dopo di che si effettuerà il login mediante nome utente/password del portale della didattica e si andrà sulla propria pagina personale del portale della didattica.

1. Accendere l'alimentatore e regolare la tensione in uscita ad un valore un po' superiore a 12 V (orientativamente fra 13 V e 15 V) mediante i due comandi VOLTAGE (Fig. 2(C); se la tensione letta

sul display di destra non aumentasse e non fosse regolabile, aumentare il valore della corrente con i comandi CURRENT)

2. Verificare il collegamento o collegare il cavo di alimentazione dell'LVDT (dall'alimentatore al CompactDAQ) alle due prese **rispettando i colori rosso e nero** (in basso a destra)
3. Verificare il collegamento dell'LVDT al sistema di acquisizione CompactDAQ (*)
4. Verificare il collegamento della cella di carico al sistema di acquisizione CompactDAQ (*)
5. Verificare il collegamento del sistema di acquisizione CompactDAQ al PC (*)
6. Montare la trave sui supporti e collegare (meccanicamente) il sistema di carico alla trave (se non già collegato)
7. Attivare il programma di acquisizione (Fig. 3) utilizzando l'apposita icona sul desktop disponibile nella cartella dedicata

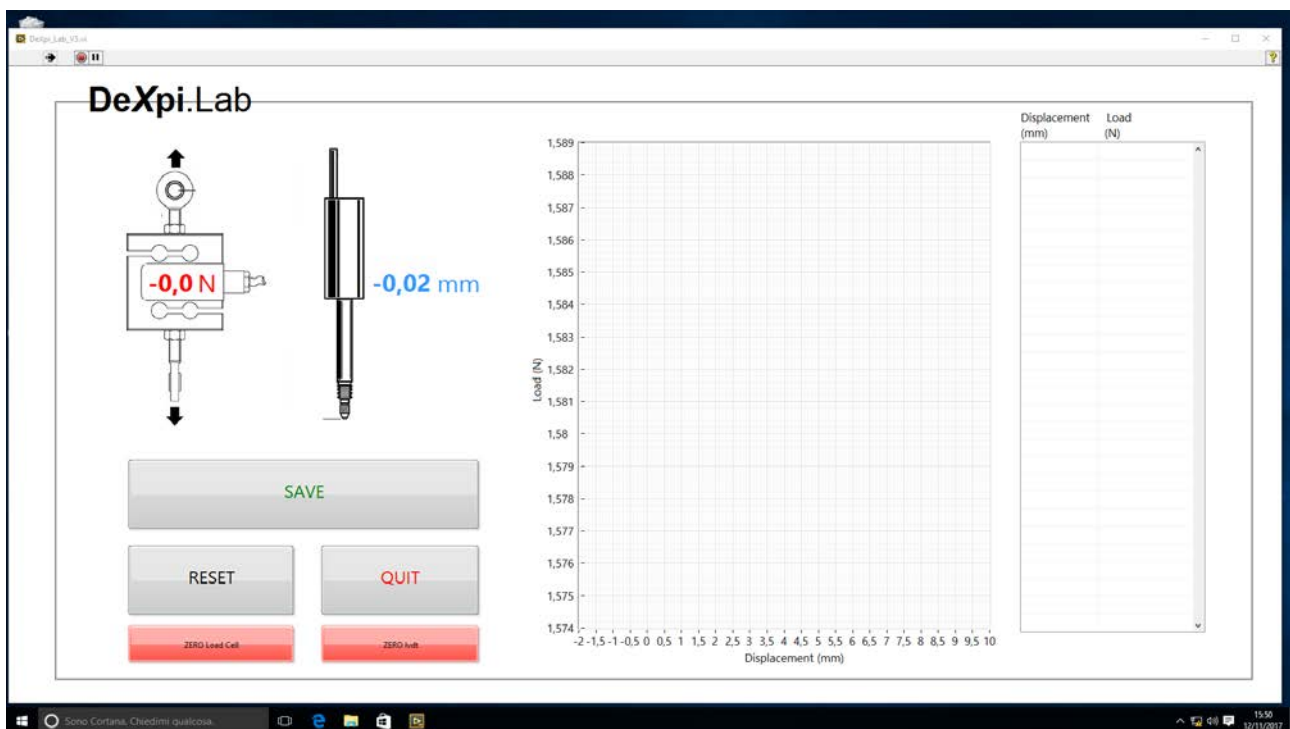


Fig. 3 – Schermata del programma di acquisizione misure

8. Accertarsi che la trave sia scarica e azzerare la lettura della cella di carico attraverso l'apposito pulsante rosso **ZERO Load Cell**
9. Regolare la posizione longitudinale della slitta di supporto dell'LVDT nella posizione in cui si intende effettuare la misura. Per la rilevazione della deformazione al centro della trave, posizionare il tastatore al lato (senza contatto) o sopra la piastrina di applicazione del carico.
10. Serrare la manopola che blocca la posizione della slitta dell'LVDT, qualora questa manopola rimanesse lenta la misura sarà viziata dal gioco slitta-guida.
11. Regolare la posizione verticale dell'LVDT per compensare gli spostamenti in seguito alla flessione della trave. In altri termini, precaricare l'LVDT in modo che il valore indicato a vuoto cambi almeno di 2-3 mm.
12. Azzerare la lettura dell'LVDT attraverso l'apposito pulsante rosso **ZERO lvd**
13. Dare avvio all'acquisizione con il programma
14. Iniziare la prova caricando e scaricando la trave (almeno **2** volte verificando la ripetibilità sul grafico visualizzato dal programma di acquisizione) seguendo questa procedura:
 - 14.1 Precaricare la trave di circa 20-30 N avvitando in senso orario il tirante esagonale.

- 14.2 Registrare i relativi valori di carico e spostamento visualizzati sulla cella e sull'LVDT premendo il tasto **SAVE** oppure leggendoli a schermo e riportandoli in una tabella (su carta o in formato elettronico).
- 14.3 Aumentare il carico agendo sulla manopola di carico collegata alla cella fino a ottenere un incremento del carico pari a 20 N.
- 14.4 Leggere e registrare questi valori di carico e spostamento premendo il tasto **SAVE**.
- 14.5 Aumentare nuovamente il carico mediante un secondo passo corrispondente a un ulteriore incremento di 20 N.
- 14.6 Ripetere i passi precedenti 14.2-14.4 fino al quarto incremento 80-90 N (dipende la punto di partenza 20-30). Memorizzare il valore di spostamento massimo.
- 14.7 Ripetere i passi ma diminuendo il carico per passi corrispondenti a decrementi decrescenti di 20 N fino al valore di precarico e acquisire quest'ultimo punto.
- 14.8 Scaricare completamente la trave cioè fino a tornare a 0 N.
- 14.9 Ripetere la procedura 14.1-14.8 almeno un'altra volta
- 14.10 Se i valori misurati mediante il programma di acquisizione sono salvati (sfruttando la funzione **SAVE**) li si può esportare come in Fig. 4 (tasto destro sulla tabella delle misure, a destra, Export → Export Data To Excel)
15. Ripetere la prova, passi 14.1 a 14.9, spostando la slitta con l'LVDT nelle altre quattro posizioni di misura tra metà lunghezza della trave e uno dei due appoggi. Negli altri punti di misura non eccedere il valore del carico massimo P_{max} anche se la corsa massima sarà minore di 5 mm. Prima di iniziare a registrare le nuove misure azzerare le rilevazioni mediate il pulsante **RESET** dopo il passo 13.8

Una volta completata la prova lasciare il sistema montato. I tecnici e gli assistenti di laboratorio provvederanno a smontare e sistemare l'attrezzatura.

(*) in caso di problemi contattare gli assistenti di laboratorio

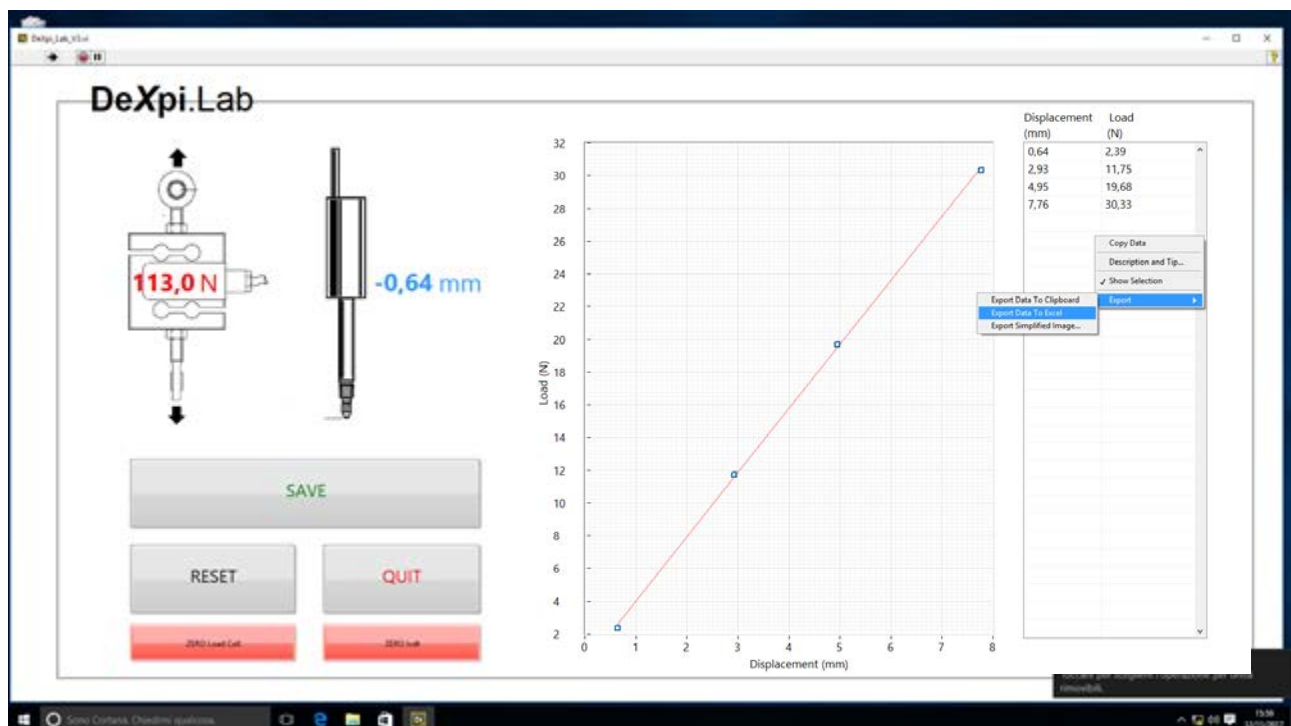


Fig. 4 – Esportazione misure

2.1. Elaborazione

Per calcolare il valore della rigidezza della trave in ciascun punto di misura, si effettua la regressione lineare dei dati di forza rispetto ai valori di spostamento. La pendenza (coefficiente angolare) della retta forza-spostamento (grafico in Fig. 4) è la rigidezza statica puntuale (flessionale) della trave (in N/mm).

In ambiente excel, la regressione lineare può essere ricavata mettendo in grafico i dati sperimentali (Grafico "Dispersione"), tasto destro sui punti inseriti nel grafico: "aggiungi linea di tendenza" e spuntare "visualizza l'equazione sul grafico". In alternativa, mediante la funzione *REGR.LIN()* o *LINEST()* nelle versioni italiana o inglese, rispettivamente.

Attenzione: non è corretto valutare la rigidezza come semplice rapporto tra un valore singolo di spostamento ed il corrispondente valore di forza. Un errore di *bias* (azzeramento non preciso di uno dei due segnali misurati) comporta un errore nel rapporto (come per esempio in Fig. 4).

3. Elaborazione dei risultati dell'esercitazione

L'elaborazione dei risultati può essere utilizzata per tracciare la linea elastica flessionale. Per fare ciò occorre ricavare, nei vari punti di misura, lo spostamento corrispondente ad un valore fisso di forza applicata: questo si può fare utilizzando i valori della rigidezza statica puntuale valutati sperimentalmente. Definito il valore di forza (per comodità la forza massima misurata nelle prove, altrimenti un qualsiasi valore di forza) gli spostamenti corrispondenti, punto per punto, si calcolano dividendo tale valore di forza (in N) per il valore della rigidezza statica puntuale (in N/mm in ciascun punto).

I valori possono essere messi in grafico con un qualsiasi strumento grafico.

I risultati sperimentali possono essere confrontati con quelli relativi alla linea elastica di una trave in flessione su tre punti secondo la teoria di De Saint Venant (*three point bending*, vedi [appendice A](#)). Lo spostamento trasversale v rispetto alla linea media indeformata può essere stimato mediante la relazione:

$$|v(z)| = \frac{P}{EJ} \left(\frac{zL^2}{16} - \frac{z^3}{12} \right) \quad 0 \leq z \leq L/2$$

La massima deflessione a centro piastra (freccia, f) è valutabile mediante la ben nota espressione:

$$\left| v\left(z = \frac{L}{2}\right) \right| = \frac{P}{EJ} \left(\frac{L^3}{48} \right) = f$$

Si noti che la rigidezza statica puntuale teorica $k(z)$ può essere stimata come:

$$k(z) = \frac{EJ}{\left(\frac{zL^2}{16} - \frac{z^3}{12} \right)} \quad 0 \leq z \leq L/2$$

Nelle due espressioni i simboli hanno il seguente significato:

- P , carico applicato a metà lunghezza
- L , distanza fra gli appoggi (la lunghezza totale della trave sarà superiore e può essere qualsiasi)
- E , modulo elastico del materiale (alluminio, circa 70×10^3 MPa)
- J , momento d'inerzia della sezione (rettangolare cava, misurare le dimensioni o chiedere agli assistenti di laboratorio)
- z , coordinata longitudinale misurata a partire da uno degli appoggi



- $v(z)$, spostamento trasversale alla coordinata z
- f , freccia (trasversale)

4. Verifica dei risultati dell'esercitazione

L'avvenuta effettuazione dell'esercitazione e della raccolta di dati corretti e ragionevoli sarà verificata tramite la generazione guidata di un report da caricare sulla propria pagina personale del portale della didattica.

In allegato ([Appendice B](#)) una traccia indicativa dello schema di relazione che si dovrà predisporre.

5. Appendice A

Linea elastica

Sotto l'azione di carichi trasversali, distribuiti o concentrati, rispetto all'asse della trave si verifica internamente la presenza di una distribuzione di taglio e momento flettente. L'azione del momento flettente, e in misura minore del taglio, causano traslazione e rotazione dei punti appartenenti all'asse della trave. La deformata così ottenuta dell'asse della trave prende il nome di linea elastica. Nel caso di una trave rettilinea si avrà l'incurvamento dell'asse con traslazione rispetto all'asse precedentemente rettilineo.

Dalla teoria elastica delle travi rettilinee si arriva a determinare che la curvatura della linea d'asse è proporzionale al valore del momento flettente nel punto considerato:

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{E(z)J_x(z)}$$

Avendo indicato con:

$\chi_x(z)$, curvatura della linea d'asse della trave nel punto di coordinata longitudinale z

$M_x(z)$, momento flettente agente nella sezione di coordinata longitudinale z

$E(z)$, modulo elastico del materiale della trave nel punto di coordinata longitudinale z

$J_x(z)$, momento quadratico della sezione nel punto di coordinata longitudinale z

Per semplicità si riduce l'analisi alla flessione nel piano yz . Si limiterà inoltre lo studio al caso di modulo elastico e sezione costanti e pari ad E e J_x rispettivamente.

Trascurando l'effetto della deformazione a taglio, nell'ipotesi di Eulero-Bernoulli, la curvatura risulta pari alla derivata prima della rotazione della sezione trasversale nel punto considerato e, per piccole rotazioni, pari alla derivata seconda dello spostamento trasversale $v(z)$:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} \approx \chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EJ_x}$$

Integrando due volte la distribuzione di momento flettente, ed applicando le necessarie condizioni al contorno, si valuta la distribuzione dello spostamento trasversale $v(z)$ ovvero la linea elastica cercata.

Per risolvere il problema in esame si dovrà quindi prima ottenere la distribuzione di momento flettente lungo la trave, poi mediante doppia integrazione si ricaverà la linea elastica cercata. Sfruttando la simmetria del problema in esame (carico al centro e appoggi simmetrici rispetto al punto centrale) si potrà limitare il calcolo ad una sola metà della struttura in esame.

Le distribuzioni di taglio e momento sono mostrate in Fig. A1

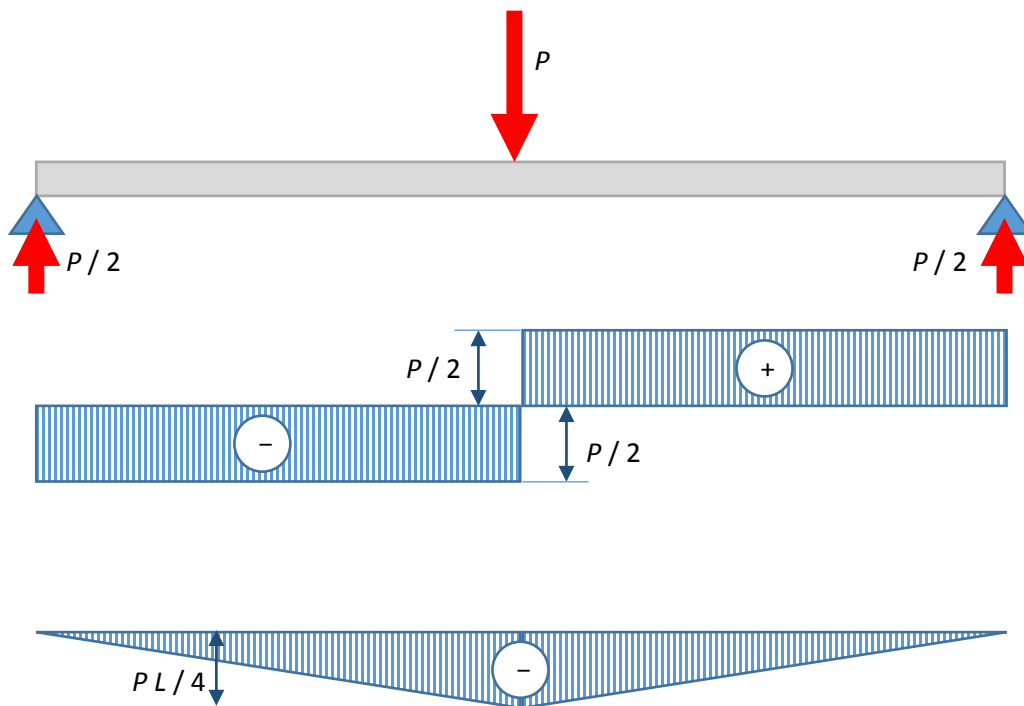


Fig. A1 – Schematizzazione del problema e distribuzioni di taglio e momento

Le distribuzioni di taglio e di momento sono descritte dalle seguenti equazioni:

$$T_y(z) = \left(\frac{dM_x(z)}{dz} \right) = \begin{cases} \frac{P}{2} & 0 \leq z < \frac{L}{2} \\ -\frac{P}{2} & \frac{L}{2} < z \leq L \end{cases}$$

$$M_x(z) = \begin{cases} \frac{P}{2}z & 0 \leq z < \frac{L}{2} \\ -\frac{P}{2}z & \frac{L}{2} < z \leq L \end{cases}$$

$$M_{x,\max} = M_x\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{PL}{4}$$

Si tratta quindi di integrare l'equazione del momento flettente nell'intervallo $0 \leq z \leq L/2$ imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$\frac{dv}{dz}\left(z = \frac{L}{2}\right) = 0$$

$$v(z = 0) = 0$$

Ovvero rotazione nulla al centro ($z = L/2$) e spostamento nullo in corrispondenza dell'appoggio ($z = 0$).

Prima integrazione dà:

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EJ_x} \rightarrow \int \frac{d^2v(z)}{dz^2} = \int \frac{M_x(z)}{EJ_x} = \int \frac{Pz}{2EJ} dz$$

$$\frac{dv(z)}{dz} = \frac{Pz^2}{4EJ_x} + C_1$$

Imponendo la prima condizione al contorno ($dv/dz (L/2) = 0$):

$$\left. \frac{dv(z)}{dz} \right|_{z=L/2} = \frac{PL^2}{16EJ_x} + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{16EJ_x}$$

Seconda integrazione dà:

$$\frac{dv(z)}{dz} = \frac{Pz^2}{4EJ_x} - \frac{PL^2}{16EJ_x} \rightarrow \int \frac{dv(z)}{dz} = \int \left(\frac{Pz^2}{4EJ_x} - \frac{PL^2}{16EJ_x} \right) dz$$

$$v(z) = \frac{Pz^3}{12EJ_x} - \frac{PL^2z}{16EJ_x} + C_2$$

Imponendo la seconda condizione al contorno ($v(z=0) = 0$):

$$v(z=0) = \frac{P0^3}{12EJ_x} - \frac{PL^20}{16EJ_x} + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

L'espressione finale esplicita della linea elastica risulta quindi:

$$v(z) = \frac{P}{EJ_x} \left(\frac{z^3}{12} - \frac{L^2z}{16} \right)$$

Una rappresentazione dell'andamento per il caso in esame è mostrato in Fig. A2.

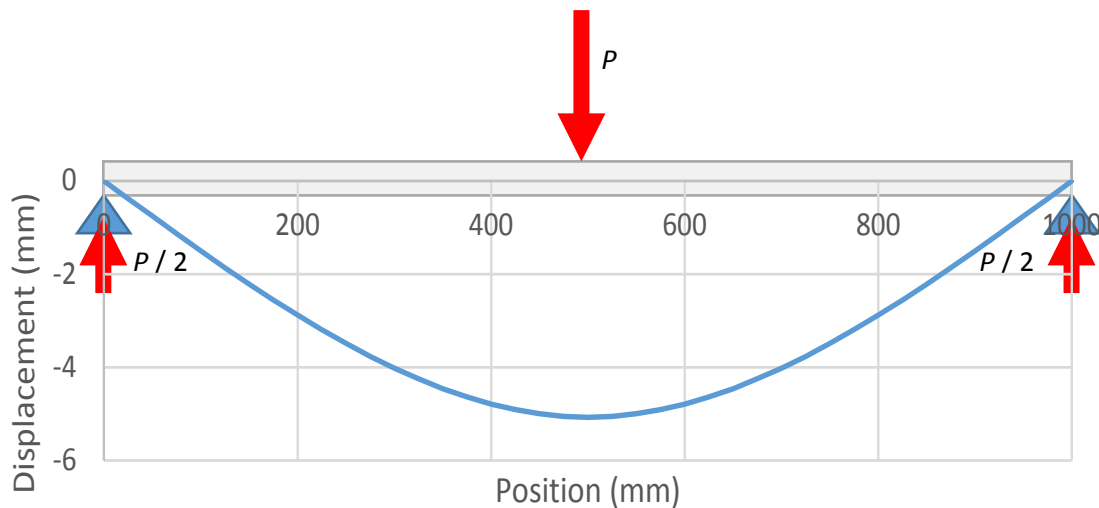


Fig. A2 – Linea elastica (i valori numerici sono solo a titolo di esempio)



6. Appendice B

Struttura della maschera di verifica dei risultati sperimentali

Scheda valutazione Esperienza

Corso: Fondamenti di Meccanica Strutturale

Tema: Studio sperimentale della linea elastica di una trave su tre appoggi

Descrizione esperienza (campo obbligatorio, minimo 500 caratteri)

Descrizione della procedura (campo obbligatorio, minimo 500 caratteri)

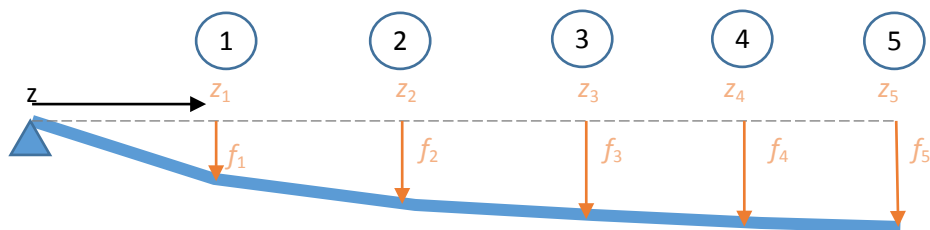
Descrizione dell'attrezzatura utilizzata (campo obbligatorio, minimo 200 caratteri)



Rilevazioni (campi obbligatori, con verifica automatica del risultato)

Punto No.	1	2	3	4	5
Posizione, z (mm)	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
Freccia, f (mm)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5

Deformata elastica sulla base delle misure indicate



Nota:

- Sottinteso che le misure devono essere in millimetri

Analisi dei risultati e conclusioni (campo obbligatorio, minimo 300 caratteri)

Commenti (campo facoltativo, massimo 1000 caratteri)